

ISSN 0452—9910

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ им. В.М. ГЛУШКОВА
МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-УЧЕБНЫЙ ЦЕНТР
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ



Кибер- не Тика

И

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ
ТЕХНИКА**

132

ВЫПУСК

2001

УДК 681.5 + 621.391:61

В сборнике представлены результаты исследований в области теории и практики сложных систем управления, а также рассматриваются актуальные вопросы медицинской и биологической кибернетики.

Для научных работников, инженеров, а также аспирантов и студентов вузов соответствующих специальностей.

Редакционная коллегия

И.В. Сергиенко (ответственный редактор серии),
В.И. Гриценко (зам. ответственного редактора серии),
Н.В. Туроверова (ответственный секретарь серии),

В.М. Кунцевич (ответственный редактор выпуска),
А.А. Чикрий (ответственный редактор выпуска),
В.В. Павлов (ответственный редактор выпуска),
А.А. Попов (ответственный редактор выпуска)

Утверждено к печати ученым советом
Международного научно-учебного центра ЮНЕСКО
информационных технологий и систем НАН Украины и
Министерства образования и науки Украины
План выпуска 2001 г.

Адрес редколлегии
03680 Киев ГСП, просп. Академика Глушкова, 40
Международный научно-учебный центр ЮНЕСКО
информационных технологий и систем НАН Украины и
Министерства образования и науки Украины
Тел. 266 25 49

Редактор *Л.И. Лесько*. Компьютерная верстка *О.И. Жудра*

КИБЕРНЕТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Выпуск 132

МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

КИЕВ 2001

Основан в 1965 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Сложные системы управления

<i>Жуковский В.И.</i> Гарантированный дележ в дифференциальной кооперативной игре при неопределенности	3
<i>Васюхин М.И.</i> Метод разрешающих функций при решении задач преследования в интерактивных геоинформационных комплексах оперативного взаимодействия	21
<i>Гасанов А.С.</i> Об одном подходе к линеаризации нелинейных математических моделей для принятия решений при управлении объектами	33
<i>Дывак Н.П.</i> Оптимальное планирование эксперимента в случае локализации области параметров интервальной модели	39
<i>Матвийчук К.С.</i> Техническая устойчивость процесса управления движением по взлетно-посадочной полосе летательной системы в условиях действия бокового ветра	48

Медицинская и биологическая кибернетика

<i>Корсунский В.М., Фирсов Л.Ф.</i> Электродинамическая аналогия и ее применение для изучения микроциркуляторного русла системы кровообращения человека	68
<i>Майоров О.Ю., Глухов А.Б.</i> Ошибки спектральных оценок при исследовании биоэлектрической активности мозга	80
<i>Зенкина В.И., Коваль П.Н.</i> Прогнозирование токсичности эпоксидных смол с использованием методов распознавания образов	94

О. Ю. Майоров, А. Б. Глухов

ОШИБКИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ БИОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ МОЗГА

Предлагаются методы определения смещения и дисперсии ковариационных спектральных оценок сигналов электрической активности мозга. Рассматривается оптимизация параметров спектрального анализа на основе зависимости погрешностей спектральных оценок от этих параметров.

Введение

Начиная с первых нейрофизиологических исследований с использованием спектрального анализа и до настоящего времени, делаются попытки совершенствования методики выбора параметров анализа биоэлектрической активности мозга. Тем не менее многие вопросы не получили достаточного решения. Противоречивы сведения о выборе таких параметров, как длительность T_s анализируемого отрезка, интервал дискретизации h , величина максимального временного сдвига τ_m для вычисления ковариационной функции при коррелограммном методе спектрального оценивания. Используется необоснованно широкий диапазон этих параметров. Можно встретить значения T_s от 4 с до 5 мин, значения τ_m от 0,25 до 2 с.

Настоящая статья посвящена оценке погрешности определения спектральной плотности коррелограммным методом в случае стационарных эргодических сигналов и обоснованию выбора основных параметров цифрового спектрального анализа сигналов биоэлектрической активности головного мозга (электроэнцефалограмм, электросубкортикограмм). В ней развивается метод, предложенный ранее в [1].

Есть много случаев, когда биоэлектрическую активность структур головного мозга можно считать стационарной в пределах анализируемого промежутка времени. В первую очередь это исследование стойких патологических состояний человека и животных, экспериментальное моделирование хронических эмоциональных стрессов и неврозов, изучение устойчивых состояний здорового мозга и др.

Постановка задачи

Рекомендации о параметрах спектрального анализа зависят от способа определения спектральных характеристик. При нейрофизиологических исследованиях часто представляет интерес только часть спектра электрической активности в диапазоне частот от 0 до некоторой максимальной частоты f_m , во многих случаях от 0 до 30 Гц. При этом целесообразна фильтрация сигнала, позволяющая использовать больший интервал дискретизации для сокращения объема вычислений при ковариационном и спектральном анализе.

Передаточные функции реальных фильтров не идеальны, поэтому при выборе фильтра, который должен пропускать всю частотную информацию в диапазоне частот от 0 до f_m , точку отсечки фильтра следует взять несколько большей f_m . В этом случае максимальная частота F_m фильтрованного сигнала будет больше f_m .

Пусть $x(t)$ — фильтрованный сигнал с нулевым математическим ожиданием и берутся отсчеты этого сигнала с интервалом h между отсчетами, по которым вычисляется оценка $\hat{R}(\tau)$ ковариационной функции $R(\tau)$ для значений $\tau = kh, k = 0, 1, \dots, m$:

$$\hat{R}(kh) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(ih) x(ih + kh).$$

Положим $mh = \tau_m, Nh = T$. При этом $T_s = T + \tau_m$. Таким образом, предполагается использование несмещенной оценки ковариационной функции. На основе $\hat{R}(kh)$ вычисляется сглаженная оценка $\tilde{S}(f)$ спектральной плотности $S(f)$ сигнала:

$$\tilde{S}(f) = h \sum_{k=-m}^m \hat{R}(kh) \omega(kh) \cos(2\pi f kh),$$

где полагаем $\hat{R}(-kh) = \hat{R}(kh)$ при $k > 0$, $\omega(\tau)$ — сглаживающее ковариационное окно. Оценки $\tilde{S}(f)$ вычисляются обычно для значений f , принадлежащих «стандартному» набору частот $f = j\lambda, j = 0, 1, \dots, m, \lambda = \frac{1}{2\tau_m}$.

Иногда будем рассматривать спектральное окно $W(f)$, представляющее собой преобразование Фурье ковариационного окна $\omega(\tau)$. Для указанной последовательности обработки сигнала ниже определяется погрешность спектральной оценки $\tilde{S}(f)$ и обосновывается выбор параметров T, h, τ_m спектрального анализа.

Погрешность спектральной оценки — один из важнейших показателей эффективности спектрального анализа. Она зависит как от характера сигнала, так и от параметров спектрального анализа. Знание зависимости погрешности от указанных параметров позволяет, с одной стороны, оценить точность конкретного анализа, и, с другой, обоснованно выбрать параметры T, h, τ_m .

Учитываются следующие факторы, влияющие на погрешность:

- 1) сглаживающее окно;
- 2) длительность T_s анализируемого отрезка сигнала (или значение величины T).

Другим источником погрешности может быть наложение частот, обусловленное квантованием сигнала во времени. Но эта погрешность может быть устранена, если интервал h выбран достаточно малым.

Пусть $Y(f)$ — непрерывное преобразование Фурье (CFT) некоторой функции $y(t)$ и $Y(f) = 0$ при $|f| > F_1$, где F_0 — какая-нибудь частота, большая f_m , и берутся отсчеты функции $y(t)$ с интервалом $h = \frac{1}{2F}$, где F — любая частота, большая или равная средней частоте интервала (f_m, F_0) , т.е. $F \geq \frac{f_m + F_0}{2}$. Тогда при $F < F_0$ часть спектра $Y(f)$ с частотами f , которые удовлетворяют условию $F < |f| < F_0$, будет наложена на спектр в диапазоне частот f , удовлетворяющих условию $2F - F_0 < |f| < F_0$, что приведет к искажению последнего (эффект наложения или подмены частот). Поскольку $f_m \leq 2F - F_0$, то начальный участок спектра $Y(f)$ с частотами $|f| \leq f_m$ не будет искажен. При $F \geq F_0$ наложения частот не будет вовсе. Таким образом, если частота Найквиста $F = \frac{1}{2h} \geq \frac{f_m + F_0}{2}$, то при $|f| \leq f_m$ CFT функции $y(t)$ равно дискретному преобразованию Фурье (DFT) последовательности $y(kh)$, т.е. в указанном интервале частот наложения не будет.

Вернемся к сигналу $x(t)$. Если $S(f) = 0$ при $|f| \geq F_m$, то найдется такая частота F'_m ($F'_m > F_m$), что при $|f| \geq F'_m$ практически равна нулю свертка спектральной плотности $S(f)$ и модуля сглаживающего спектрального окна, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(p) |W(f-p)| dp \approx 0 \text{ при } |f| \geq F'_m. \quad (1)$$

Соотношение (1) влечет за собой равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(p) W(f-p) dp \approx 0 \text{ при } |f| \geq F'_m,$$

интеграл в этом равенстве представляет собой CFT произведения $R(\tau)w(\tau)$.

Например, если $F_m = 50$ Гц (при $f_m = 30$ Гц), то свертка в формуле (1) практически равна нулю при $|f| \geq F'_m = 60$ Гц. Действительно, если $|f| \geq 60$ Гц, то при $|p| < 50$ Гц практически $W(f-p) = 0$, а при $|p| > 50$ Гц имеем $S(p) = 0$. Так, для окна Ханна при $\tau_m = 0,5$ с получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S(p) |W(f-p)| dp &\leq S_{\max} \int_{-50}^{50} |W(f-p)| dp \leq S_{\max} \int_{-10}^{110} |W(z)| dz \leq \\ &\leq \frac{S_{\max}}{2\pi} \int_{-10}^{110} \frac{dz}{z(z^2-1)} = 0,8 \times 10^{-3} S_{\max}, \end{aligned}$$

где S_{\max} — максимальное значение спектральной плотности $S(f)$.

Предположим, что частота Найквиста $F = \frac{1}{2h}$ для сигнала $x(t)$ выбрана такой, что выполняются условия

$$F \geq F_m \text{ и } F \geq \frac{f_m + F'_m}{2}. \quad (2)$$

Первое из этих условий представляет собой критерий Найквиста, второе обеспечивает равенство при $|f| \leq f_m$ CFT произведения $R(\tau)\omega(\tau)$ и DFT последовательности $R(kh)\omega(kh)$.

Например, при $f_m = 30$ Гц, $F_m = 50$ Гц и $F'_m = 60$ Гц условия (2) сводятся к условию $F \geq 45$ Гц.

Мы провели анализ биоэлектрической активности корковых областей, структур лимбической, ретикулярной и стриопаллидарной систем, некоторых ядер гипоталамуса головного мозга белых крыс в состоянии покоя и в условиях моделирования эмоционального стресса. Анализ коррелограмм показал, что ковариационные функции $R(\tau)$ достаточно точно аппроксимируются затухающим колебанием некоторой частоты ν :

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(2\pi\nu\tau), \quad (3)$$

где b и α — положительные константы.

На рис. 1, *a-e* представлены коррелограммы сигналов некоторых структур лимбической системы и их аппроксимация функцией (3). Параметры α и ν аппроксимирующих функций указаны в табл. 1. Коррелограммы соответствуют сигналам на выходе фильтра нижних частот с полосой пропускания от 0 Гц до 35 Гц (35 Гц — частота отсечки фильтра).

Таблица 1. Параметры α (с^{-1}) и ν (Гц) аппроксимирующей функции (3) некоторых структур лимбической системы крыс

Структура	Фон		Стресс	
	$\alpha, \text{с}^{-1}$	$\nu, \text{Гц}$	$\alpha, \text{с}^{-1}$	$\nu, \text{Гц}$
ССР	21,7	6,0	19,5	6,0
ММ	21,1	7,0	15,9	5,5
НVM	20,3	7,0	17,7	5,5

Как видно из рис. 1, в различных структурах мозга и для разных функциональных состояний (покой, хронический эмоциональный стресс) аппроксимация ковариационной функции зависимостью (3) носит вполне удовлетворительный характер для данного вида подопытных животных.

Смещение спектральной оценки

Смещение спектральной оценки $\tilde{S}(f)$ равно

$$\delta(f) = S(f) - E(\tilde{S}(f)),$$

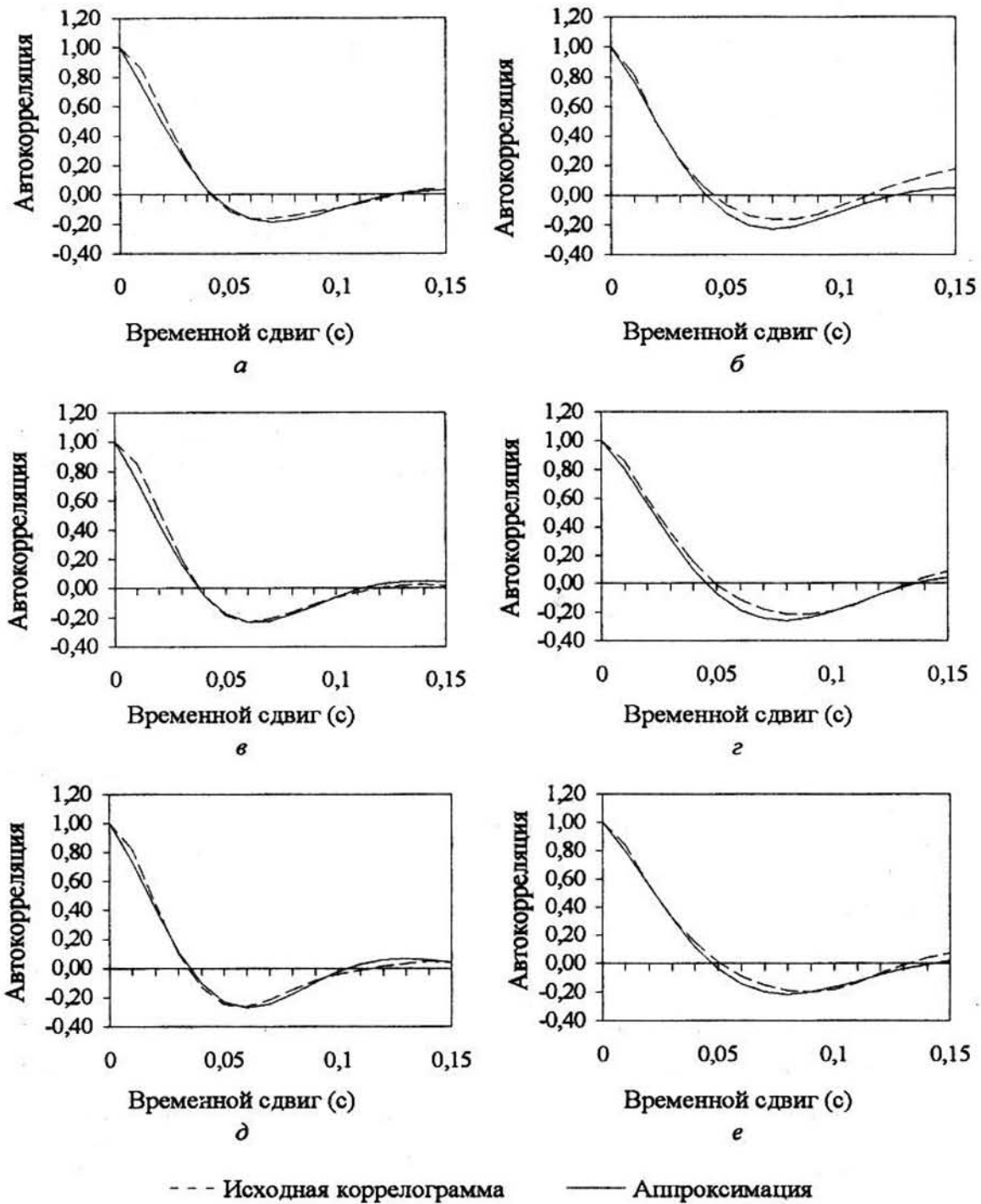


Рис. 1. Коррелограммы сигналов (пунктирные линии) некоторых структур лимбической системы и их аппроксимация функцией (5) (сплошные линии) в состоянии покоя (а, в, д) и в условиях хронического эмоционального стресса (б, г, е); (а, б) задняя цингулярная кора (cortex singularis posterior (CCP); (в, г) медиальное маммилярное ядро (nucleus mammilaris medialis (MM); (д, е) вентро-медиальное ядро гипоталамуса (nucleus ventro-medialis hypothalamy (HVM)

где E — символ математического ожидания. Положим

$$\sigma^2(f) = \text{var}(\tilde{S}(f)) = E\{[\tilde{S}(f) - E(\tilde{S}(f))]^2\}.$$

Средний квадрат ошибки спектральной оценки $\tilde{S}(f)$ есть

$$\varepsilon^2(f) = E \{ [\tilde{S}(f) - S(f)]^2 \} = \delta^2(f) + \sigma^2(f).$$

Рассмотрим смещение спектральной оценки для сигналов с ковариационной функцией (3). Известно, что оценка спектральной плотности является смещенной, несмотря на то, что вычисляется с использованием несмещенной оценки ковариационной функции (см., например, [2]).

Имеем

$$E(\tilde{S}(f)) = h \sum_{k=-m}^m R(kh) \omega(kh) \cos(2\pi f kh).$$

Если выполнены условия (2), то при $|f| \leq f_m$ CFT произведения $R(\tau)\omega(\tau)$ равно DFT последовательности $R(kh)\omega(kh)$, поэтому

$$E(\tilde{S}(f)) = \int_{-\tau_m}^{\tau_m} R(\tau)\omega(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau, \quad |f| \leq f_m. \quad (4)$$

Следовательно, смещение можно представить в виде

$$\delta(f) = S(f) - L(f), \quad (5)$$

где $L(f)$ — преобразование Фурье произведения $R(\tau)\omega(\tau)$ ковариационной функции и сглаживающего ковариационного окна $\omega(\tau)$.

Спектральная плотность $S(f)$ сигнала с ковариационной функцией (3) может быть представлена в виде

$$S(f) = b(S_0(f - \nu) + S_0(f + \nu)),$$

где

$$S_0(f) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

$S_0(f)$ — спектральная плотность сигнала с ковариационной функцией $R_0(\tau) = \frac{1}{2} \exp(-\alpha|\tau|)$. Для погрешности $\delta(f)$ имеем

$$\delta(f) = b(e(f - \nu) + e(f + \nu)), \quad (6)$$

где

$$e(f) = S_0(f) - L_0(f), \quad (7)$$

а $L_0(f)$ — преобразование Фурье произведения $R_0(\tau)\omega(\tau)$, т.е. результат сглаживания спектральной плотности $S_0(f)$. Определение погрешности $\delta(f)$ сводится, таким образом, к определению погрешности $e(f)$, обусловленной

сглаживанием спектра $S_0(f)$. Сглаживание спектра $S_0(f)$ можно описать равенством

$$L_0(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k A_0(f - k\lambda),$$

где

$$A_0(f) = 2 \int_0^{\tau_m} R_0(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau,$$

w_k — коэффициенты, определяемые сглаживающим окном, причем $w_{-k} = w_k$. Погрешность $e(f)$ можно представить теперь в виде

$$e(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k (S_0(f) - A_0(f - k\lambda)). \quad (8)$$

Для сглаживающих окон Ханна и Хемминга $w_k = 0$ при $k \geq 2$; коэффициенты w_0 и w_1 следующие:

$$w_0 = \begin{cases} 0,50, \\ 0,54, \end{cases} \quad w_1 = \begin{cases} 0,25 \text{ (окно Ханна),} \\ 0,23 \text{ (окно Хемминга).} \end{cases}$$

Следовательно, в правой части равенства (8) отличны от нуля лишь три члена ряда.

Для спектральной плотности $A_0(f)$ можно получить следующее соотношение на стандартном наборе частот, т.е. при $f = j\lambda$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$A_0(f) = S_0(f)(1 \pm e^{-\alpha\tau_m}), \quad (9)$$

где берется + при $f = \pm\lambda, \pm 3\lambda, \pm 5\lambda, \dots$ и — — при $f = 0, \pm 2\lambda, \pm 4\lambda, \dots$.

Положим

$$2d(f) = 2S_0(f) - S_0(f - \lambda) - S_0(f + \lambda),$$

величина $d(f)$ представляет собой разность значения $S_0(f)$ и среднего арифметического значений спектральной плотности S_0 на двух ближайших к f частотах стандартного набора, расположенных по разные стороны от f . Из формул (8) и (9) после некоторых преобразований получим для окон Ханна и Хемминга

$$e(f) = 2w_1 d(f) \pm e^{-\alpha\tau_m} (2w_1 d(f) + \varepsilon S_0(f)), \quad (10)$$

где $\varepsilon = w_0 - 2w_1$, — берется тогда, когда в формуле (9) берется +. Для других сглаживающих окон надо учесть в формуле (8) несколько основных слагаемых с наибольшими коэффициентами (3–5 слагаемых) и оценить сумму остальных. При рассмотрении смещения ограничиваемся

результатами для окон Ханна и Хемминга. В случае окна Ханна $\varepsilon = 0$ и в (10) соответствующее слагаемое равно нулю. Для окна Хемминга $\varepsilon = 0,08$.

Погрешность $\delta(f)$ зависит от частоты. По-видимому, ее максимум приходится на ту частоту, где достигается наибольшее значение спектральной плотности. Для сигнала с ковариационной функцией (3) спектральная плотность $S(f)$, как нетрудно показать, имеет максимум на частоте f_0 , определяемой равенством

$\frac{f_0^2}{v^2} = 2\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma^2 - 1$, где $\gamma = \alpha/2\pi v$. Для ЭЭГ

обычно $\gamma < 1$, в этом случае $\frac{f_0^2}{v^2} \approx 1$, причем абсолютная погрешность этого

приближенного равенства меньше $\gamma^2/4$. В связи с этим представляется целесообразным оценивать смещение $\delta(f)$ на частоте v . Из (6) следует, что $\delta(v) = b(e(0) + e(2v))$. Если частоту $2v$ можно считать принадлежащей стандартному набору частот, то обе величины $e(0)$ и $e(2v)$ могут быть определены по формуле (10).

Оценим погрешность $\delta(v)$ для трех случаев, соответствующих рис. 1, а, в, д. Пусть $\tau_m = 0,5$ с и используется сглаживающее окно Ханна. При вычислении $e(0)$ в формуле (10) следует взять +.

(i) При $\alpha = 21,7 \text{ с}^{-1}$ и $v = 6$ Гц имеем

$$e(0) = 3,87 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\alpha}, \quad e(2v) = (-6,66 \cdot 10^{-4} \pm 1,29 \cdot 10^{-8}) \frac{1}{\alpha} = -6,66 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\alpha}.$$

Итак, $\delta(v) = 3,80 \cdot 10^{-2} \frac{b}{\alpha}$.

(ii) При $\alpha = 21,1 \text{ с}^{-1}$ и $v = 7$ Гц имеем

$$e(0) = 4,07 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\alpha}, \quad e(2v) = (-3,68 \cdot 10^{-4} \pm 9,63 \cdot 10^{-9}) \frac{1}{\alpha} = -3,68 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, $\delta(v) = 4,04 \cdot 10^{-2} \frac{b}{\alpha}$.

(iii) При $\alpha = 20,3 \text{ с}^{-1}$ и $v = 7$ Гц имеем

$$e(0) = 4,37 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\alpha}, \quad e(2v) = (-3,45 \cdot 10^{-4} \pm 1,35 \cdot 10^{-8}) \frac{1}{\alpha} = -3,45 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\alpha},$$

поэтому $\delta(v) = 4,34 \cdot 10^{-2} \frac{b}{\alpha}$.

Для сопоставления этих погрешностей с наибольшим значением оцениваемой спектральной плотности $S(f)$ можно принять во внимание, что это наибольшее значение превосходит величину b/α . Следовательно, абсолютная величина погрешности $\delta(v)$ в трех рассмотренных случаях не превышает соответственно 3,80%, 4,04% и 4,34% максимума спектральной плотности $S(f)$.

В табл. 2 приведены относительные погрешности $\frac{\delta(f)}{S(f)} \times 100$ для случая (i), т.е. при $\alpha = 21.7 \text{ с}^{-1}$, $\nu = 6 \text{ Гц}$, $\tau_m = 0.5 \text{ с}$ и сглаживающем окне Ханна для всех частот стандартного набора в диапазоне от 0 Гц до 30 Гц, рассчитанные по формуле (10).

Таблица 2. Погрешности спектральной оценки при $\alpha = 21,7 \text{ с}^{-1}$, $\nu = 6 \text{ Гц}$, $\tau_m = 0,5 \text{ с}$, $T = 40 \text{ с}$ и сглаживающем окне Ханна

$f, \text{ Гц}$	$\frac{\delta(f)}{S(f)} \times 100$	$\frac{\sigma(f)}{S(f)} \times 100$	$\frac{\varepsilon(f)}{S(f)} \times 100$
0	-2.1	13.9	14.0
1	-2.1	10.5	10.8
2	-2.1	9.9	10.1
3	-1.5	9.8	10.0
4	0.0	9.7	9.7
5	2.3	9.6	9.8
6	3.5	9.5	10.1
7	2.4	9.6	9.9
8	0.1	9.8	9.8
9	-1.5	9.9	10.0
10	-2.1	9.9	10.2
11	-2.1	9.9	10.1
12	-1.9	9.9	10.1
13	-1.6	9.9	10.0
14	-1.4	9.8	9.9
15	-1.2	9.8	9.9
16	-1.0	9.8	9.8
17	-0.9	9.8	9.8
18	-0.7	9.8	9.8
19	-0.6	9.8	9.8
20	-0.6	9.7	9.8
21	-0.5	9.7	9.7
22	-0.4	9.7	9.7
23	-0.4	9.7	9.7
24	-0.4	9.7	9.7
25	-0.3	9.7	9.7
26	-0.3	9.7	9.7
27	-0.3	9.7	9.7
28	-0.2	9.7	9.7
29	-0.2	9.7	9.7
30	-0.2	9.7	9.7

Анализ формулы (10) показывает, что смещение спектральной оценки уменьшается при увеличении τ_m . Располагая полученными зависимостями, можно выбрать приемлемое значение τ_m при заданном сглаживающем окне.

Дисперсия спектральной оценки

Длительность T_s анализируемого отрезка сигнала не влияет на величину смещения. Этот параметр связан с дисперсией σ^2 . Рассмотрим дисперсию σ^2 , предполагая, что $x(t)$ — гауссовский случайный процесс:

$$\sigma^2(f) = E\left(\left[\tilde{S}(f) - E(\tilde{S}(f))\right]^2\right) = \frac{h^2}{T} \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-m}^m I(kh, lh) \omega(kh) \omega(lh) \exp(-j2\pi f kh) \exp(-j2\pi f lh), \quad (11)$$

где

$$I(kh, lh) = h \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) [R(nh)R(nh+lh-kh) + R(nh+lh)R(nh-kh)]. \quad (12)$$

Пусть длительность $T = Nh$ такова, что

$$R(\tau) \approx 0, \quad \text{if } |\tau| > T_1, \quad T_1 \ll T. \quad (13)$$

Для рассматриваемых сигналов обычно можно считать, что $R(\tau) = 0$ при $|\tau| > 1$ с, следовательно, условие (13) выполняется, например, при $T_1 = 1$ с и $T = 40$ с. В таком случае $1 - \frac{|n|}{N} \approx 1$ при $|nh| < T_1$ и из формулы (12) получаем

$$I(kh, lh) \approx h \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R(nh)R(nh+lh-kh) + R(nh+lh)R(nh-kh)] = P(lh-kh) + P(lh+kh), \quad (14)$$

где

$$P(t) = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nh)R(nh+t).$$

Величину $P(t)$ можно рассматривать как значение DFT $G_d(f)$ последовательности $R(nh)R(nh+t)$ при $f = 0$.

Рассмотрим CFT $G(f)$ функции $R(\tau)R(\tau+t)$ (при фиксированном t).

Имеем $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(p)S(f-p) \exp(j2\pi pt) dp = 0$ при $|f| \geq 2F_m$, так как $S(p)S(f-p) = 0$ при указанных f и любом p . Следовательно, если

$F = \frac{1}{2h} \geq \frac{0 + 2F_m}{2} = F_m$, то $G_d(0) = G(0)$, т.е.

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)R(\tau+t) d\tau. \quad (15)$$

Условие $F \geq F_m$, при котором верно равенство (15), есть одно из условий (2).

Аналогично, используя другое из условий (2) и равенство (1), получим для действительного a

$$\begin{aligned} h \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(kh+a)w(kh) \exp(-j2\pi f kh) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} R(x+a)w(x) \exp(-j2\pi f x) dx \quad \text{при } |f| \leq f_m. \end{aligned} \quad (16)$$

Принимая во внимание соотношения (14)–(16), после преобразований формула (11) будет иметь вид

$$\sigma^2(f) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(p)W(f-p)[W(f-p) + W(f+p)] dp, \quad |f| \leq f_m. \quad (17)$$

Данная формула показывает, как дисперсия спектральной оценки зависит от T : это обратно пропорциональная зависимость. Формулу (17) можно использовать для вычисления дисперсии, применяя для вычисления интеграла численные методы.

Мы использовали предположения (2), чтобы вместо громоздких выражений, содержащих суммы и бесконечные ряды, получить более компактные выражения, содержащие интегралы. Таким образом, если частота выборки несколько больше, чем наименьшая частота, определяемая критерием Найквиста $F = \frac{1}{2h} \geq F_m$, то оценивание погрешности спектрального анализа существенно упрощается.

Для конкретных окон интеграл в формуле (17) можно с достаточной точностью вычислить приближенно, заменяя бесконечные пределы интегрирования конечными и применяя формулу трапеций с шагом λ . Приведем соответствующие формулы для окна Ханна, выбрав промежуток интегрирования $-2\lambda \leq p \leq 2\lambda$, соответствующий главному лепестку спектрального окна. Для частот стандартного набора имеем:

$$\sigma^2(0) = \frac{\tau_m}{2T} (2S^2(0) + S^2(\lambda)),$$

$$\sigma^2(\lambda) = \frac{\tau_m}{4T} (2S^2(\lambda) + S^2(0) + \frac{1}{2}S^2(2\lambda)),$$

$$\sigma^2(f) = \frac{\tau_m}{4T} [2S^2(f) + \frac{1}{2}(S^2(f-\lambda)) + S^2(f+\lambda)], \quad f = kh, \quad k > 1. \quad (18)$$

Для ориентировочной оценки дисперсии эти формулы можно заменить следующими:

$$\sigma^2(0) \approx \frac{3}{2} \frac{\tau_m}{T} S^2(0),$$

$$\sigma^2(\lambda) \approx \frac{7}{8} \frac{\tau_m}{T} S^2(\lambda),$$

$$\sigma^2(f) \approx \frac{3}{4} \frac{\tau_m}{T} S^2(f), \quad f = kh, \quad k > 1.$$

Приведем результаты вычисления дисперсии $D(v)$ по формуле (17) для трех случаев, соответствующих рис. 1 а, в, д при $\tau_m = 0,5$ с, $T = 40$ с и сглаживающем окне Ханна, для которого $w(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} \right)$.

(i) При $\alpha = 21,7$ с⁻¹ и $\nu = 6$ Гц имеем

$$\sigma^2(\nu) = 2,2 \cdot 10^{-5} b^2, \quad \sigma(\nu) = 0,10 \frac{b}{\alpha}.$$

(ii) При $\alpha = 21,1$ с⁻¹ и $\nu = 7$ Гц имеем

$$\sigma^2(\nu) = 2,2 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma(\nu) = 0,10 \frac{b}{\alpha}.$$

(iii) При $\alpha = 20,3$ с⁻¹ и $\nu = 7$ Гц имеем

$$\sigma^2(\nu) = 2,4 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma(\nu) = 0,10 \frac{b}{\alpha}.$$

Таким образом, стандартное отклонение $\sigma(\nu)$ спектральной оценки в трех рассмотренных случаях не превышает 10% максимума спектральной плотности $S(f)$.

В табл. 2 приведены значения $\frac{\sigma(f)}{S(f)} \times 100$ для случая (i) для всех частот стандартного набора от 0 до 30 Гц, рассчитанные по формуле (17). Указаны также значения $\frac{\varepsilon(f)}{S(f)} \times 100$ относительной среднеквадратической ошибки. Обратим внимание на то, что погрешность $\frac{\varepsilon(f)}{S(f)}$ наибольшая при малых частотах.

В качестве примера применения полученных соотношений рассмотрим зависимость относительной погрешности $\frac{\varepsilon(f)}{S(f)}$ для заданной частоты f от

величины τ_m . На рис. 2 показана зависимость погрешности $\frac{\varepsilon(\nu)}{S(\nu)}$ от τ_m при $T = 40$ с для случая (i), полученная на основании формул (6), (10), (18). Наименьшая погрешность имеется при $\tau_m = 0,43$ с. Если τ_m выбирается не точно равным $0,43$ с, а например, берется любое значение в диапазоне от $0,35$ с до $0,5$ с, то относительная погрешность $\frac{\varepsilon(\nu)}{S(\nu)}$ увеличивается по сравнению с наименьшим значением, достигаемым при $\tau_m = 0,43$ с, не более чем на 4%. Следовательно, ошибка $\varepsilon(\nu)$ не является очень чувствительной к изменению τ_m .

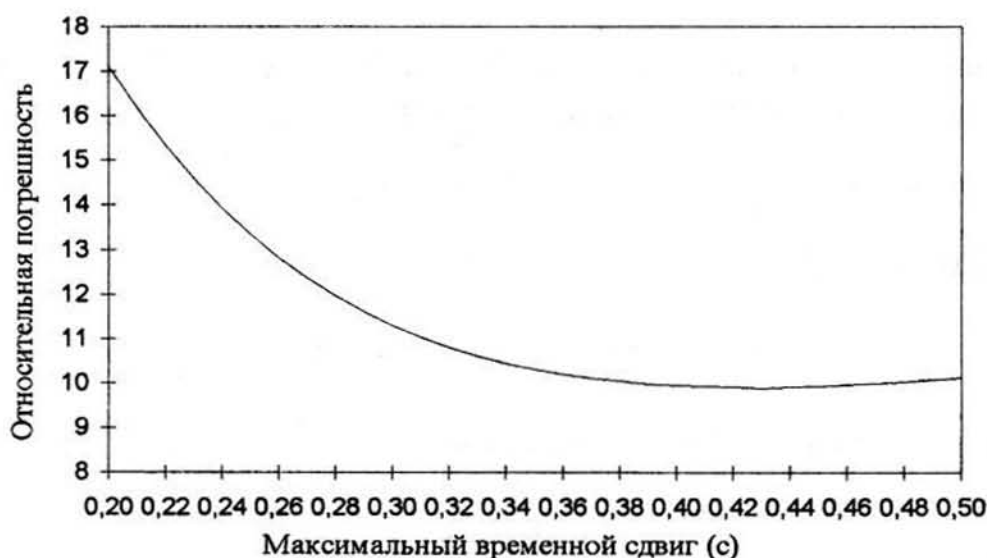


Рис. 2. Относительная погрешность $\frac{\varepsilon(\nu)}{S(\nu)} \times 100$ спектральной оценки сигнала ССР для различных при $T = 40$ с и сглаживающем окне Ханна

Заключение

Предложены выражения для смещения и дисперсии спектральной оценки, которые позволяют обоснованно выбрать параметры спектрального анализа T , h , τ_m .

Смещение спектральной оценки получено для характерных ковариационных функций фильтрованных сигналов электрической активности мозга. При анализе дисперсии спектральной оценки никакие предположения о ковариационной функции сигнала не использовались.

При проведении спектрального анализа конкретного сигнала параметры α и ν аппроксимирующей зависимости (3) неизвестны. Однако после вычисления ковариационной функции этого сигнала можно осуществить ее аппроксимацию функцией (3) и определить параметры α и ν . Располагая этими параметрами, можно оценить погрешность спектральной оценки в соответствии с описанным выше методом для тех или иных значений параметров T , h , τ_m .

Может оказаться, что значение T , используемое при вычислении ковариационной функции, не обеспечивает приемлемой погрешности спектральной оценки при любом выборе величины максимального временного сдвига в допустимом для этой величины диапазоне. Тогда целесообразно провести повторную оценку ковариационной функции при другом значении T и аппроксимацию этой уточненной оценки, и т.д., до тех пор, пока не будет обеспечена нужная точность спектрального анализа.

Если предстоят исследования серии однотипных сигналов и в определенном устойчивом состоянии мозга, указанная оценка погрешности и выбор параметров спектрального анализа должны быть выполнены на основе нескольких сигналов и использоваться в последующем при спектральном анализе подобных сигналов.

Конечно, ковариационные функции разных реализаций будут в определенной степени отличаться между собой, как, например, ковариационные функции задней цингулярной извилины в покое и в условиях моделирования эмоционального стресса (рис. 1 а, б). Разными будут и параметры α и ν , но диапазон возможных погрешностей для всей серии, по-видимому, будет ясен. При необходимости изменения объекта исследования (человек, кролик, крыса и т.п.) или при исследовании сигналов иной природы перед началом серии исследований должен быть сделан новый анализ погрешности и даны свои рекомендации о параметрах спектрального анализа.

1. Майоров О.Ю., Глухов А.Б. Обоснование параметров и оценка погрешностей при цифровом спектральном анализе ЭЭГ // Физиология человека. — 1988. — 14, № 1. — С. 81–85.
2. Marple S.L., Jr. Digital Spectral Analysis with Application. — New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 07632, 1990. — 584 p.

Харьковская медицинская академия
последипломного образования МЗ Украины,
Институт охраны здоровья детей и подростков АМН Украины,
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Получено 20.09.2001